EPFL - automne 2015	M. Troyanov
Introduction aux Variétés Différentiables	14 janvier 2016
Examen	16h15–19h15

1. [18 points]

(a) Définir précisément la notion d'application différentiable entre deux variétés C^∞.

(b) Enoncer le théorème du rang constant (en précisant les définitions des notions utilisées).

(c) Expliquer ce que sont les immersions, plongements et submersion.

(d) Prouver que toute submersion est une application ouverte.

---

2. [11 points] On suppose que $R > r > 0$.

a) Prouver que la partie M de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2 + z^2 = r^2$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

b) Décrire cette sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de quelle surface s'agit-il ?

c) Trouver une paramétrisation locale de M.

d) Comment feriez-vous pour construire un atlas de M.

---

3. [14 points]

(a) Définir ce qu'est une dérivation globale $X \in \mathcal{D}(M)$, où M est une variété C^∞.

(b) Définir ce qu'est le crochet de deux éléments de $\mathcal{D}(M)$ et montrer que $[X, Y]$ est encore un élément de $\mathcal{D}(M)$.

(c) Prouver que pour $X, Y \in \mathcal{D}(M)$ et $f, g \in C^\infty(M)$ on a

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fX(g))\,Y - (gY(f))\,X.$$

(d) Calculer le crochet des champs de vecteurs $X, Y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ définis par $X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$.

---

4. [8 points]

(a) Soit M une variété différentiable et $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^\bullet(M)$. Montrer que si ω_1, ω_2 sont fermées, alors $\omega_1 \wedge \omega_2$ est fermée aussi.

(b) Montrer que si de plus l'une des deux formes est exacte, alors $\omega_1 \wedge \omega_2$ est aussi exacte.

(c) Soit $\omega \in \Omega^1(M)$, et $f \in C^\infty(M)$ telle que $f(x) \neq 0$ quel que soit $x \in M$. Supposons que $d(f\omega) = 0$. Montrer qu'alors $\omega \wedge d\omega = 0$.

5. [10 points] Soit M une variété orientée compacte à bord de dimension n et $\alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^l(M)$. On appelle *formule d'intégration par parties* l'identité suivante :

$$\int_M (d\alpha) \wedge \beta = \int_{\partial M} \alpha \wedge \beta + (-1)^{k+1} \int_M \alpha \wedge d\beta$$

(a) Préciser sous quelle conditions sur n, k, l cette formule a un sens. Expliquer pourquoi.

(b) En supposant ces conditions satisfaites, démontrer la formule.

(c) Cette formule est-elle correcte si on ne suppose pas que la variété M est orientée ? (Justifier votre réponse).

(d) Supposons que M est non compacte, quelles hypothèses minimales faut-il supposer sur α et/ou β pour que cette formule soit correcte ? (Justifier votre réponse).

---

6. [13 points]

(a) Donner la définition de la dérivée extérieure d'une forme différentielle.

(b) Enoncer quatre propriétés de d.

(c) Prouver que pour toute forme α de degré 1, on a

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

---

7. [7 points]

(a) Soient $X_1, ..., X_n \in \Gamma(M)$ des champs de vecteurs linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension n. Soient $\theta^1, \ldots, \theta^n \in \Omega^1(M)$ des formes différentielles de degré 1 sur M, telles que $\theta^i(X_j) = \delta^i_j$. Montrer l'équivalence des deux équations suivantes:

(i) $[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k$

(ii) $d\theta^k = -C^k_{ij} \theta^i \wedge \theta^j$,

où les C^k_{ij} sont n^3 constantes.

(b) Le résultat précédent est-il aussi valable si les C^k_{ij} sont des éléments de $C^\infty(M)$?

1. i) On fixe $z = \pm r$, puis $y = 0$ par exemple. On arrive comme ça a se convaincre qu'il s'agit bien d'un tore.

ii) On va montrer que c'est une surface de niveau d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$. Soit $f(x,y,z) = (R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4R^4(x^2+y^2)$. Alors, un point $p(x,y,z)$ du tore est tel que $f(p) = 0$. Donc M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

iii) Une paramétrisation est par exemple

$$\begin{array}{rrcl} \tilde{f}: & (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi) & \to & \tilde{M} \\ & (\theta,\varphi) & \mapsto & ((R + r\cos\varphi)\cos\theta, (R + r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi) \end{array}$$

$\tilde{M}$ est le tore auquel on a enlevé le cercle de centre l'origine et de rayon R ainsi que le cercle de centre $(-R,0,0)$ et de rayon r. Pour obtenir le tore en entier, il faudra jouer avec les angles φ et θ.